

En Learning Study om area

Ingress

Har ett fotavtryck en area? Hur tar du i så fall reda på den? Svaret på de här frågorna kan bli allt ifrån att "det går inte att ta reda på arean, för det finns ingen" till att "man får väl ta längden x bredden".

Tanken med vår studie var att ta reda på elevers förståelse av areabegreppet och ge dem möjlighet att få känsla för area, att det är ytans storlek. När eleverna får förståelse för vad area är kan de hitta strategier för att beräkna figurer, oregelbundna som regelbundna.

Det som är avgörande för elevens lärande är hur lärare behandlar innehållet i sin undervisning. För att lärare ska kunna möta eleverna där de är i sitt lärande måste vi ta reda på "vilken uppfattning av lärandeobjektet som den lärande har, samt se de kvalitativa skillnader som den lärande ännu inte upptäckt." (Holmqvist, 2006, s.12) Vilka aspekter av lärandeobjektet⁽⁶⁾ är kritiska för att eleverna ska förstå? De kritiska aspekterna⁽⁷⁾ är grunden till förståelse för lärandeobjektet och något som lärare ofta tar för givet då vi redan äger den kunskapen. För eleverna är kunskapen ny och vi måste återupptäcka det vi ser som självklar kunskap för att ge eleverna möjlighet att urskilja det lärande som är en förutsättning för förståelsen (Marton, Booth, 2000).

I en learning study⁽¹⁾ arbetar lärare gemensamt med att diskutera, analysera och planera undervisningen av ett lärandeobjekt, med stöd av forskning och tidigare erfarenheter.

Syftet är att förbättra undervisningen och fokus ligger på lektionens innehåll samt elevernas lärande.

Bakgrund

Vi är fyra pedagoger som gått delkurs 1 och 2 i Learning study vid Göteborgs universitet under läsåret 2010-11. Vi kommer från Öckerö, Göteborg, Västerås och Marks kommun och är yrkesverksamma från



1. Learning Study = en grupp lärare arbetar gemensamt med att diskutera, analysera och planera undervisningen av ett lärande objekt utifrån variationsteorin. Analys av lärandet sker utifrån tre perspektiv:

2. Avsedda lärandet – *the intended object*, det lärande som läraren planerar att eleverna ska urskilja i undervisningen.

3. Iscensatta lärandet – *the enacted object*, det lärande som görs möjligt att urskilja under genomförandet av undervisningen.

4. Erfarna lärandet – *lived object*, det eleverna lärt sig.

5. Variationsteorin (vetenskaplig metod) = genom att variera vissa aspekter och hålla andra konstanta ger man eleverna möjlighet att urskilja det lärande som är kritiskt för deras förståelse av lärandeobjektet. De mönster av variation man använder sig av är kontrastering, separation, generalisering och fusion.

6. Lärandeobjekt = det specifika ämnesinnehåll man väljer i en Learning study (t.ex. areabegreppet)

7. Kritiska aspekter = de små byggstenar som är avgörande för elevens förståelse för det som ska läras in.

8. Learning study-cykeln = en serie på 3-4 lektioner med samma lärandeobjekt. Lektionerna genomförs i *olika* klasser och oftast av olika lärare. Cykeln består av flera steg i en särskild ordning.

1. Val av lärandeobjekt och hypotetiska kritiska aspekter.
2. Genomförande av förtest i alla klasser.
3. Analys av förtestet och gemensam planering av lektion ett med variationsteorin, lärandeobjekt och de funna kritiska aspekterna som grund.
4. Lektion ett genomförs och filmas.
5. Genomförande av eftertest i grupp 1.
6. Analys av eftertestet och lektion ett. Lärargruppen förändrar lektionen så att nästa elevgrupp ska få ännu bättre möjligheter att förstå lärandeobjektet.

De följande lektionerna genomförs, analyseras och förbättras enligt principen för lektion ett.

Avslutningsvis görs en skriftlig sammanfattning av studien.

förskoleklass till årskurs 9. Studien genomfördes med elever från två årskurs 5:or, en årskurs 5-6:a och en förskoleklass. Den genomförda Learning study-cykeln⁽⁸⁾ bestod av fem lektioner, där första lektionen och tredje lektionen (extra lektion) genomfördes i samma grupp. Anledningen till att det blev en extra lektion var de många förändringar vi gjorde efter de första två lektionerna. Den femte lektionen genomfördes i förskoleklass med samma övergripande innehåll men med anpassning till åldersgruppen.

Val av lärandeobjekt

Vi valde area som lärandeobjekt. Area var ett ämnesinnehåll vi redan vid kursstart diskuterade som intressant för oss att arbeta vidare med. De erfarenheter vi har av undervisning i area var att elevernas förståelse för areabegreppet är begränsad, area har en tendens till att bara vara formler. Forskning vi tog del av visade att det ofta ligger för stort fokus på beräkningar, procedurer och formler. Relationen mellan 2-dimensionell geometri och mätning av area behöver undervisas samtidigt för att ge eleverna en helhetssyn på areabegreppet. (Huang, Hsin-Mei E. 2009). I de diskussioner vi förde om area ansåg vi att areabegreppet behöver befästas och sättas ord på i undervisningen. Elever har svårigheter med att anpassa strategier för att hantera olika problem vid mätning av area och formlerna eleverna använder saknar förankring i förståelse. Area förväxlas med omkrets och eleverna vet inte skillnaden mellan längdenhet och areaenhet, samt när det används.

Utifrån de hypotetiskt kritiska aspekterna, se tabell 1, skapades ett förtest som alla klasser genomförde samma dag. Resultaten av testen analyserades och de mest framträdande elevuppfattningarna var:

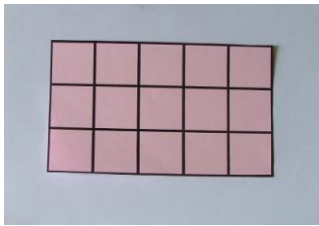
- Oregelbundna figurer går inte att beräkna area på eller har ingen area.
- Area är detsamma som längden • bredden.
- Eleverna saknar förståelse och strategier för area när de jämför olika figurers area.
- Area är området i en figur.

Lektion 1 och 2	Lektion 3 och 4
Lärandeobjekt: Förmågan att förstå vad area är samt relationen mellan storheterna area och längd.	Lärandeobjekt: Area är ytans storlek
Hypotetiska kritiska aspekter	Kritiska aspekter
<ul style="list-style-type: none"> - Area är ytans storlek. - Samma area kan ha olika form. - Area kan delas upp i delar och sättas ihop till en ny helhet med samma area (arean är konstant). - Areaenheten är en bestämd kvadrat. - Arealen kan mätas och beräknas via en annan storhet (längd) - Byte av perspektiv och rutiner från att "täcka" en area till att "mäta" längder. 	<ul style="list-style-type: none"> - Area är ytans storlek. - Areans konservering (samma area kan ha olika form och area kan delas upp i delar och sättas ihop till en ny helhet med samma area) - Area påverkas inte av spegling, vridning, translation (förflyttning) - Area beräknas med kvadratenheter, som är i samma storlek. En enhet som upprepas (används iterativt) för att ge ett mått på arean.

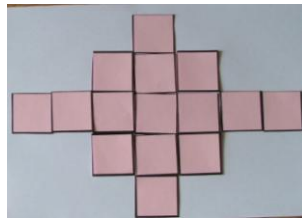
Tabell 1 visar förändringar som skedde mellan de första två lektionerna och de två sista.

Genomförande av lektion 1: Lektionen inleddes med gruppvis diskussion vad som är specifikt med fyra geometriska figurer; rektangel, kvadrat, romb, parallelogram. Kvadratens specifika egenskaper, att den har lika långa sidor, ville vi att eleverna skulle urskilja då det var den figur de skulle använda sig av vid mätningarna. Alla grupper fick sedan med hjälp av tre

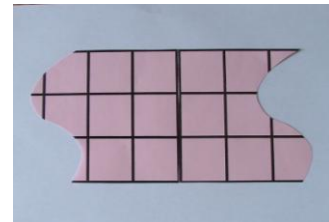
olika stora kvadrater mäta och jämföra olika areor, regelbundna och oregelbundna, genom att "täcka" arean. Efter övningen där "täcka" arean som strategi användes följde en dialog med eleverna om vad area är. Nästa strategi blev att "klippa isär" och "sätta ihop" vid jämförelse av area.



Ursprungsfigur i momentet klippa isär och sätta ihop.



Elevförslag på ny figur med samma area.



Lärarens förslag på ny figur, dialog kring denna.

Under lektionen fick eleverna även jobba med att konstruera dubbla arean av två olika figurer ritade på blankt papper. Till sin hjälp hade de papper att rita på, sax och de kvadrater de fick i övningen täcka arean. Vi ville att eleverna skulle urskilja att antalet av lika stora kvadrater är dubbelt så många i den dubbla figuren jämfört med ursprungsfiguren.

Revideringar och dess betydelse för lärandet inför lektion 2: Vid analys av vårt avsedda lärande⁽²⁾ och det iscensatta lärandet⁽³⁾ gjorde vi en förändring av inledningen samt hur vi tydliggjorde dubbelarea. Vi tog bort användandet av tre olika kvadratenheter samtidigt och använde oss istället av en kvadratenhet i taget. Vår tanke med att använda olika kvadratenheter var att eleverna skulle få förståelse för att det finns olika areaenheter och att det är i kvadrat. För eleverna var det för mycket som varierade och de kunde inte använda sig av kvadrater för att bestämma area på olika figurer. Även nya moment lades till för att ge eleverna möjlighet att urskilja oregelbundna figurers areor samt jämföra storleken på olika figurers areor.

Genomförande av lektion 2: Lektionen började med en dialog kring elevernas uppfattning om vad area är. Nästa moment var att kontrastera area och omkrets genom att måla area med en färg och omkrets med en annan. Utifrån riktade frågor från läraren skulle eleverna ges möjlighet att urskilja area som ytans storlek, det du täcker och att omkrets inte är area. Detta behöll vi från lektion 1:

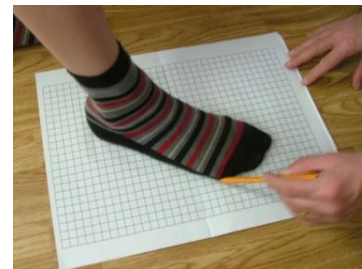
- 1) kontrastera kvadraten med andra geometriska figurer,
- 2) klippa isär och sätta ihop till nya geometriska figurer med samma area som ursprungsfiguren.

I arbetet med dubbelt så stor area var utgångsfiguren konstant och utseendet på den dubbla figuren fick variera. Eleverna fick ett centimeterrutat papper med 3 olika stora kvadrater som de skulle göra dubbelt så stora.

Nytt: Hälften så stor area, tre olika rektanglar på centimeterrutat papper skulle göras hälften så stora.

Nytt: Oregelbundna figurers area, hur stor area har ditt fotavtryck? Enheten som användes var cm^2 . (Se bild till höger)

Nytt: Vilken typ av areor mäter vi med enheterna 1 cm^2 , 1 dm^2 , 1 m^2 ? Eleverna fick se mallar av dessa. Här fick de möjlighet att urskilja varför det finns olika areaenheter och vilken nytta vi har av dem.



Nytt: Vid ytterligare jämförelse av olika enheter hade vi förberett ett underlag där en och samma figur var avbildad, men med helt olika storlek på area. Figuren hade samma antal

kvadrater men storleken på kvadraterna var olika i de två figurerna. Eleverna fick ta ställning till påståendet: Är areorna lika stora? Eleverna svarade både att de hade lika stora areor och att de inte hade det.

Revideringar och dess betydelse för lärandet inför lektion 3: När vi analyserade det erfarna lärandet⁽⁴⁾ ansåg vi att den förståelse vi ville nå inte var det eleverna erfor. Det gjorde att vi bestämde oss för att analysera förtesten återigen, men med fokus på vilken förståelse testen förmedlade. Det handlade främst om analys av elevernas olika uppfattningar i stället för ”rätt och fel”. Vi konstaterade utifrån eftertesten att förståelsen för areabegreppet överskuggades av räknande av antal rutor eller kvadrater i en figur. Eleverna fick förståelse för strategin där ”*en figur definieras som antalet enhetskvadrater som behövs för att exakt täcka dess yta*”

(Löwing, Kilborn, 2009 s. 322). Det lärande vi avsett, förståelse för areabegreppet, som är förutsättning för att kunna använda sig av strategierna, lärde sig inte eleverna.

Vid en djupare analys av de tre perspektiven; det avsedda lärandet, det lärande som gjordes möjligt på lektionerna och det eleverna lärde, framkom det att det vi trott var **ett** lärandeobjekt faktiskt var **tre** (kvadratens princip, relationen mellan storheterna area och längd, area är ytans storlek)! En Learning study ska innehålla ett lärandeobjekt vars kritiska aspekter ska varieras strukturerat sinsemellan. Flera lärandeobjekt innebär att variationen blir ostrukturerad och eleverna får inte möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna som gör att förståelse för lärandeobjektet, i det här fallet areabegreppet, nås.

När vårt lärandeobjekt blev area är ytans storlek förändrades de kritiska aspekterna se tabell 1. Utifrån de kritiska aspekter vi kunde identifiera i förtest och eftertest skapade vi en tydlig struktur av varians och invarians, vilken kritisk aspekt som varierade och vilken som skulle hållas konstant i enlighet med variationsteorin⁽⁵⁾. Tiden var ett problem från start, lektionerna blev långa, upp till två timmar! Det gjorde att vi bestämde att använda oss av påståenden och att låta läraren genomföra stora delar av det praktiska genomförandet.

Genomförande av lektion 3. Lektionen inleddes med att eleverna fick se fem olika figurer. De fick ta ställning till om figurerna hade samma area eller inte samma area. De skulle sedan motivera val av påstående, där de skulle använda sig av en strategi för att jämföra area. Nästa uppgift blev att diskutera vad som var samma och inte samma i en figur med olika area men samma form (oregelbunden figur utan räta vinklar). Efter den här uppgiften fick eleverna se tre likadana figurer med samma area, vridas och speglas. Läraren använde sig sedan av tre kors i samma storlek, men med olika kvadratenheter. Nu övergick lektionen till att bli mer praktisk för eleverna. Den första uppgiften de fick var att klippa isär en figur med ett klipp och passa in den i en mall med kvadratrutor. Den andra uppgiften var att göra en dubbel area av fyra olika figurer. De första två figurerna var regelbundna med hela cm^2 . Den tredje figuren var oregelbunden och gjord med cm^2 -rutat pappret och den sista figuren var en oregelbunden figur utan cm^2 .

Revideringar och dess betydelse för lärandet inför lektion 4: Vi gjorde få förändringar då det erfarna lärandet för eleverna var det vi hade avsett. Vi ändrade ordning på innehållet så att de oregelbundna figurerna introducerades före de fem figurerna. De tre korsen i samma storlek gav inte eleverna möjlighet att urskilja det vi avsett, vilket gjorde att vi istället hade tre kors med olika area men med samma antal kvadrater. Den enda praktiska övning som eleverna utförde var dubbel area.

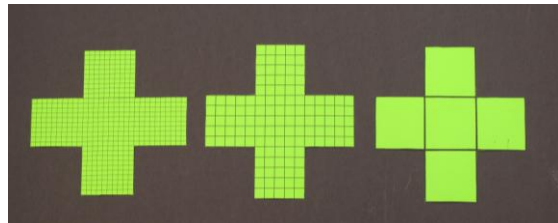
Det vi ville att eleverna skulle lära under de två första lektionerna var förståelse för vad area är, samtidigt som de skulle förstå relationen mellan storheten area och längd. Det lärande

under lektionerna som gjordes möjligt för eleverna handlade om kvadraten och kvadratenhetens betydelse för areaberäkning. När lärandeobjektet blivit **ett**, blev det möjligt att variera de kritiska aspekterna strukturerat eftersom de utgick från det lärandeobjekt eleverna skulle urskilja. Förståelse för att area ”handlar om att jämföra storleken av en given yta med storleken av en redan känd yta”. (Löwing, Kilborn, 2009, s. 322)

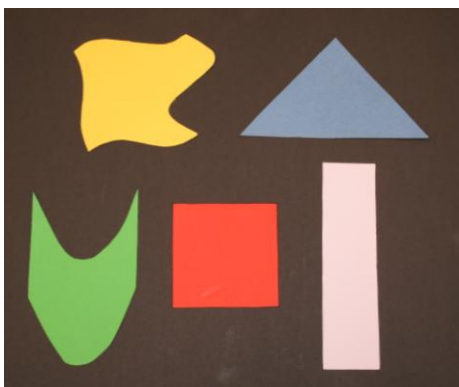
De två sista lektionerna strukturerades tydligt utifrån mönster av variation; vilka kritiska aspekter som skulle urskiljas, vilka av dem som skulle vara konstanta och vilka som skulle varieras. Bilderna visar exempel på mönster av variation som förekom under lektionerna.



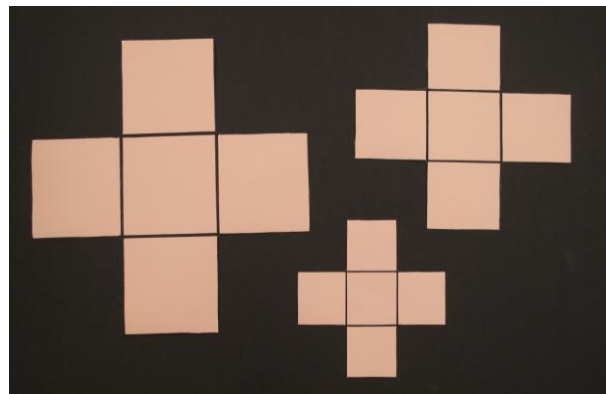
Generalisering – eleverna ges möjlighet att urskilja att area är ytans storlek genom att jämföra att den inte förändras av figurens placering.



Separation – eleverna ges möjlighet att urskilja att kvadratenheternas antal inte påverkar areans storlek genom att arean är konstant, det är kvadratenhetens storlek som förändrar area.



Kontrastering – eleverna ges möjlighet att urskilja att area är ytans storlek genom att utseendet på figurerna varierar medan arean är samma.



Fusion – eleverna ges möjlighet att urskilja att area är ytans storlek, att den kan mätas med kvadratenheter och att det är kvadratenhetens storlek som bestämmer area.

Vid analys av eftertesten kan vi konstatera att eleverna fått en djupare förståelse för areabegreppet; area är ytans storlek. Variationen under lektionerna gjorde att eleverna förstod areabegreppet och kunde använda sig av den förståelsen vid jämförelse och beräkning av area. Insikt, att formeln $A = \text{längden} \cdot \text{bredden}$ är en metod för endast rektanglars area, var ett indirekt lärande som eleverna fick. Det fanns även en elev som förklarade att man kan göra samma med triangeln genom ”att ta längden gånger bredden och dela det du får på hälften, för en rektangel är ju två trianglar”.

Vi kan se att fokuseringen av lärandeobjektet som genomfördes mellan studiens lektion 2 och 3 fick positiva effekter på elevernas förståelse av areabegreppet då den klass som deltog i studiens fjärde lektion efter en enda lektion fick lika bra resultat i eftertestet som den klass

som deltog i studiens lektion 1 och 3 trots att den sistnämnda klassen hade fördelen av att redan i första lektionen lära sig strategier för att jämföra areor. Detta visar på hur viktigt det är att lärandeobjektet är ett och att variation av de kritiska aspekterna är det som ger eleverna möjlighet att urskilja innehållet, inte strategier för jämförelse, metoden i sig.

Genomförande och analys av arealektion i förskoleklass: Vi valde att benämna area som att "täcka ytan". Lektionen började med att introducera kvadraten som skulle användas som "verktyg" för att beräkna ytans storlek. Barnen fick se olika regelbundna figurer och beräkna dessa utifrån den bestämda kvadraten hur många som behövdes för att täcka den. Detta var för barnen en enkel uppgift och de kunde med "blotta ögat" se hur många kvadrater som behövdes.

När två olika stora kvadrater visades och frågan om vad som var lika och olika med dessa svarade barnen att den ena var större men det var svårare för dem att se likheterna, att båda var kvadrater och att de var gula. Det var alltså lättare för eleverna att se olikheter än likheter. Som nästa uppgift fick eleverna se två olika figurer med fyra kvadraters area. På frågan om dessa var lika stora hävdade barnen att den som var längre var större. Detta tyder på att barnen ser längd som storhet. Genom att flytta om kvadraterna så att figurerna fick samma form var barnen med på att de var lika stora men när de flyttades tillbaka och räknades om och om igen var det ändå svårt för eleverna att se att de båda figurerna hade samma area/var lika stora. Med många funderingar från barnen så började tillslut insikten komma att den ena var ju längre men också smalare så de var "nog" lika stora ändå.



Generalisering - eleverna ges möjlighet att urskilja att arean är samma eftersom ytans storlek är samma även om figurens utseende varierar.

I analysen av lektionen kom vi fram till att många tankar och resonemang väcktes hos barnen och att det inte är svårt att undervisa i area eftersom man konkret kan visa, flytta och räkna kvadrater genom att täcka ytan. Begreppet area kan alltså undervisas i tidig ålder och kan i och med det underlätta förståelsen i det fortsatta lärandet.

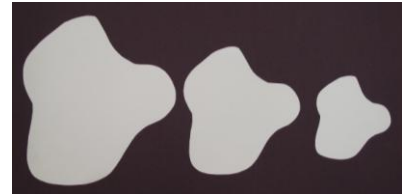
Erfarenheter av att genomföra en Learning study

- Var noga med att välja **ett** lärandeobjekt. Upplever du som lärare minsta osäkerhet inför första lektionen är en bra strategi att ställa frågor till sig själv om lärandeobjektet; Vet jag vad jag ska undervisa? Är det bara ett lärandeobjekt?
- Testa all teknisk utrustning innan lektionen och se till att du har tid att genomföra lektionen även då tekniska problem uppstår.
- Analysera testen utifrån de uppfattningar som svaren visar istället för antal poäng. När man analyserar uppfattningarna blir man uppmärksam på de egna självklara kunskaperna, de som du ska ge eleverna förutsättningarna att lära.
- Gör testen enkla så att felmarginalen för tolkning ska bli så liten som möjligt. Först ska de hypotetiskt kritiska aspekterna var för sig testas och sedan kan man göra ytterligare några uppgifter där de varierar samtidigt. Var tydlig för dig själv med vad som varierar och vad som är konstant i förtestet.
- Du måste lära dig det innehåll som ska undervisas. Det får du genom gemensamma kollegiala diskussioner med stöd av forskning, egna erfarenheter och elevernas tankar.

- Läraren får en undervisnings- och planeringsstrategi, samt fördjupade ämneskunskaper. Det gör att läraren utvecklar förmågan att planera undervisning utifrån elevernas förståelse av innehåll med hjälp av variationsteorin.

Erfarenheter av att undervisa area

- Börja tidigt, redan i förskolan. Area är mycket mer än en formel och att jämföra areor skapar intresse i alla åldrar. För barnen i förskoleklass var "längd" det som hörde ihop med begreppet "stor", men efter att de arbetat ett tag med figurerna på bilden och flyttat runt kvadraterna konstaterade en av dem: "Det är bara det att man har flyttat, men det är lika stor yta."
- Avväg förståelse för innehållet och praktiskt genomförande under lektionerna. Metod vid genomförande får inte överskugga förståelse för innehållet.
- Använd ord och begrepp korrekt från början. Visa på att ord kan användas i olika sammanhang och betyda olika t.ex. storlek (klädstorlek, ytans storlek), yta (ytan är mjuk, vattenytan, ytans storlek). Troligt är att det språk vi lärare använder skapar förvirring t.ex. "Hur stor är omkretsen?", "Hur lång är omkretsen?" Begreppet lång kopplar eleverna självklart till längd och då får de ett språkbruk som ger dem förutsättningarna att koppla stor till area, inte omkrets.
- Börja undervisningen om area med oregelbundna figurer utan räta linjer, där man utgår från en och samma figur där arean förändras. (Se bild till höger)
- Bearbeta de kritiska aspekterna var för sig först, men gå sedan över till att låta dem variera samtidigt.
- Var säker på att areabegreppet är befäst innan introduktionen av formler. Förståelsen leder till att eleverna själva kan resonera sig fram till formler i samtal med läraren. Eleverna får då förståelse för att formler är abstraktion av tidigare konkreta strategier.
- Arbeta tidigt med areans konservation. Låt det gå från en konkret strategi till en abstrakt strategi, som eleven kan använda sig av för att bestämma area i oregelbundna figurer. Det innebär att man först täcker areor, klipper isär och sätter ihop, och sedan övergår till att använda kvadratenheter i figurer.
- De figurer som används i undervisningen behöver placeras så att vridning, spegling och förflyttning tydliggörs som något som inte påverkar area.
- Börja arbeta med figurer utan kvadratenheter (låt de gärna finnas på baksidan så att du som lärare lättare kan klippa isär figurerna vid jämförelser). När eleverna själva ska jämföra areor kan kvadratenheter få bli ett hjälpmedel, men fokus ska fortfarande ligga på areabegreppet, inte enheten.
- Uppmärksamma eleverna på att arean på figuren under dokumentkameran (eller arbetsprojektorn) är mindre än den bild som projiceras på tavlan.



Ingrid Crawford, Bodil Lövgren, Kristin Olsson, Malin Stenson

Litteratur:

- Holmqvist, M. (red.). (2006). *Lärande i skolan. Learning study som skolutvecklingsmodell*. Lund: Studentlitteratur..
- Marton F., Booth S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.
- Lo, Mun Ling., Pong, Win Yang., & Chik, Pakey. (2005) *For each and everyone. Catering for individual differences through Learning studies*. Hong Kong: Hong Kong University Press.
- Marton, F., & Tsui, Amy B. M.(Eds.). (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah: N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Löwing. M, & Kilborn. W, (2002). *Baskunskaper i Matematik, för skola, hem och samhälle*. Lund: Studentlitteratur.
- Löwing M. & Kilborn W.(2010) *Elevs kunskaper i mätning och geometri*. Nämnaren nr1.
- Mason, J. m.fl. (1993). *Tools for Thought: The Measurement of Length of Area*. Learning and Instruction, Vol. 3. University of London. s. 39 - 54
- Huang, Hsin-Mei E. (2009). *Developing children's conceptual understanding of area measurement: A curriculum and teaching experiment*. Learning and Instruction, Vol. 21. University of London. s. 1 - 13